21. nodarbība

Nodarbības saturs: Augstāku kārtu parciālie atvasinājumi. Otrās kārtas pilnais diferenciālis. Saliktas vairāku argumentu funkcijas atvasināšana. Apslēpti dotas vairāku argumentu funkcijas atvasināšana.

21.1. Augstāku kārtu parciālie atvasinājumi

Pieņemsim, ka dota divu argumentu funkcija $z = f(x, y)$. Tai eksistē divi dažādi pirmās kārtas parciālie atvasinājumi $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ un $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, kuri arī ir divu argumentu funkcijas, tātad tās varam parciāli atvasināt gan pēc *x*, gan pēc *y*. Atvasinot pirmās kārtas atvasinājumu pēc *x* vēlreiz pēc *x*, iegūst otrās kārtas atvasinājumu $z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; atvasinot to pēc *y*, iegūst atvasinājumu $z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Parciālo atvasinājumu pēc *y* atvasinot pēc *x*, iegūst otrās kārtas atvasinājumu $z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, atvasinot pēc *y* - $z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Piemērs. Noteikt funkcijas $z = \cos^2\left(3xy^3\right)$ visus otrās kārtas parciālos atvasinājumus.

Risinājums. Vispirms noteiksim pirmās kārtas parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos\left(3xy^3\right)\cdot\left(-\sin\left(3xy^3\right)\right)\cdot 3y^3 = -3y^3\sin\left(6xy^3\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos\left(3xy^3\right)\cdot\left(-\sin\left(3xy^3\right)\right)\cdot 9xy^2 = -9xy^2\sin\left(6xy^3\right).$$

Pārveidojumos tika pielietota formula $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Tagad atvasinājumus $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$ atvasināsim pēc *x* un pēc *y*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x = -3y^3\cos\left(6xy^3\right)\cdot 6y^3 = -18y^6\cos\left(6xy^3\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = -9y^2\sin\left(6xy^3\right) - 3y^3\cos\left(6xy^3\right)\cdot 18xy^2 = -9y^2\sin\left(6xy^3\right) - 54xy^5\cos\left(6xy^3\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x = -9y^2 \sin\left(6xy^3\right) - 9xy^2 \cos\left(6xy^3\right) \cdot 6y^3 = -9y^2 \sin\left(6xy^3\right) - 54xy^5 \cos\left(6xy^3\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y = -18xy \sin\left(6xy^3\right) - 9xy^2 \cos\left(6xy^3\right) \cdot 18xy^2 = -18xy \sin\left(6xy^3\right) - 162x^2y^4 \cos\left(6xy^3\right)$$

No piemēra redzams, ka $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Tā nav sakritība, bet likumsakarība. Ja dotā funkcija, abi tās pirmās kārtas parciālie atvasinājumi un otrās kārtas atvasinājumi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ un $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ir nepārtraukti kādā punktā un tā apkārtnē, tad šajā punktā $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Tātad pie minētajiem nosacījumiem eksistē 3 atšķirīgi divu argumentu funkcijas otrās kārtas atvasinājumi. Arī tie ir divu argumentu funkcijas, kuras varam atvasināt gan pēc x, gan pēc y, tādējādi iegūstot trešās kārtas parciālos atvasinājumus, utt. Kā iegūt augstāku kārtu parciālos atvasinājumus divu argumentu funkcijai, parāda sekojošā shēma:

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Līdzīgi nosaka vairāku argumentu funkciju augstāku kārtu atvasinājumus.

Piemērs. Noteikt funkcijas $z = \sqrt[5]{3x^2 + 2xy}$ parciālo atvasinājumu $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

Risinājums. Lai noteiktu prasīto atvasinājumu $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z'''_{xyy}$, funkcija jāatvasina vienreiz pēc x, pēc tam rezultāts divreiz jāatvasina pēc y. Dotā funkcija $z = \left(3x^2 + 2xy\right)^{\frac{1}{5}}$ ir nepārtraukta visos definīcijas apgabala punktos, līdz ar to varam brīvi mainīt atvasinājumu kārtību. Vispirms funkciju atvasināsim pēc tā mainīgā, pēc kura atvasinājums būs vienkāršāks, t.i., pēc y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{5}\left(3x^2 + 2xy\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot 2x = \frac{2x}{5}\left(3x^2 + 2xy\right)^{-\frac{4}{5}}.$$

Iegūto funkciju vieglāk atvasināt pēc y, tātad tā arī darīsim:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)\left(3x^2 + 2xy\right)^{-\frac{9}{5}} \cdot 2x = -\frac{16x^2}{25}\left(3x^2 + 2xy\right)^{-\frac{9}{5}}.$$

Atliek šo funkciju atvasināt pēc x:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -\frac{32x}{25}\left(3x^2 + 2xy\right)^{-\frac{9}{5}} - \frac{16x^2}{25} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right)\left(3x^2 + 2xy\right)^{-\frac{14}{5}} \cdot (6x + 2y) =$$

$$= -\frac{32x}{25 \cdot \sqrt[5]{\left(3x^2 + 2xy\right)^9}} + \frac{144x^2(6x + 2y)}{125 \cdot \sqrt[5]{\left(3x^2 + 2xy\right)^{14}}}.$$

21.2. Otrās kārtas pilnais diferenciālis

Definīcija. Par *otrās kārtas pilno diferenciāli* sauc pilno diferenciāli no pirmās kārtas pilnā diferenciāļa.

Otrās kārtas pilno diferenciāli apzīmē ar simbolu $d^2 z$. Noteiksim tā aprēķināšanas formulu. Atcerēsimies divu argumentu funkcijas pirmās kārtas pilnā diferenciāļa aprēķināšanas formulu:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Tātad otrās kārtas pilnais diferenciālis ir

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx \cdot dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \cdot dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Ņemot vērā, ka $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, iegūsim otrās kārtas pilnā diferenciāļa aprēķināšanas formulu:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

Tā kā šī formula vizuāli atgādina summas kvadrāta formulu, to var pierakstīt šādi:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z .$$

Tikai jāņem vērā, ka pieraksts ir simbolisks, t.i., piemēram $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2$ nenozīmē atvasinājuma kāpināšanu kvadrātā, bet gan otrās kārtas atvasinājumu. Tad pēc analoģijas varam iegūt n-tās kārtas pilnā diferenciāļa formulu:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z .$$

Piemēram, trešās kārtas pilnais diferenciālis

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 .$$

Piemērs. Noteikt funkcijas $z = \ln\left(x^3 + 2xy\right)$ otrās kārtas pilno diferenciāli.

Risinājums. Vispirms noteiksim dotās funkcijas pirmās un otrās kārtas parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + 2xy} \cdot \left(3x^2 + 2y\right) = \frac{3x^2 + 2y}{x^3 + 2xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^3 + 2xy} \cdot 2x = \frac{2x}{x^3 + 2xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6x\left(x^3 + 2xy\right) - \left(3x^2 + 2y\right)\left(3x^2 + 2y\right)}{\left(x^3 + 2xy\right)^2} = \frac{6x^4 + 12x^2 y - 9x^4 - 12x^2 y - 4y^2}{\left(x^3 + 2xy\right)^2} = -\frac{3x^4 + 4y^2}{\left(x^3 + 2xy\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2\left(x^3 + 2xy\right) - \left(3x^2 + 2y\right) \cdot 2x}{\left(x^3 + 2xy\right)^2} = \frac{2x^3 + 4xy - 6x^3 - 4xy}{\left(x^3 + 2xy\right)^2} = -\frac{4x^3}{\left(x^3 + 2xy\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{0 - 2x \cdot 2x}{\left(x^3 + 2xy\right)^2} = -\frac{4x^2}{\left(x^3 + 2xy\right)^2} .$$

Atrastos atvasinājumus ievietosim otrās kārtas pilnā diferenciāļa aprēķināšanas formulā:

$$d^2z = -\frac{3x^4 + 4y^2}{\left(x^3 + 2xy\right)^2}dx - \frac{8x^3}{\left(x^3 + 2xy\right)^2}dxdy - \frac{4x^2}{\left(x^3 + 2xy\right)^2}.$$

21.3. Saliktas vairāku argumentu funkcijas atvasināšana

Aplūkosim 3 gadījumus:

1) $z = z(u,v)$ ir divu argumentu funkcija, tās argumenti u un v arī ir divu argumentu funkcijas $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Pieņemsim, ka funkcijām $z = z(u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi. Tad saliktas funkcijas $z = z(u(x,y), v(x,y))$ parciālos atvasinājumus atrod pēc formulām

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

jeb

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \quad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y.$$

2) $z = z(x,y)$ ir divu argumentu funkcija, bet tās argumenti x un y ir viena argumenta funkcijas $x = x(t)$, $y = y(t)$. Tad saliktas funkcijas $z = z(x(t), y(t))$ pilnais atvasinājums pēc t ir

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \quad \text{jeb} \quad z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t.$$

3) $z = z(x,y)$ ir divu argumentu funkcija, un tās arguments y ir viena argumenta x funkcija $y = y(x)$. Tad saliktas funkcijas $z = z(x, y(x))$ pilnais atvasinājums pēc x ir

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \text{jeb} \quad z' = z'_x + z'_y \cdot y'.$$

Piemērs. Noteikt saliktas funkcijas $z = \ln\sin\frac{u}{v^2}$, kur $u = x\sin y$, $v = y\cos x$, parciālos atvasinājumus.

Risinājums. Atradīsim funkcijas z parciālos atvasinājumus pēc u un pēc v:

$$z'_u = \frac{1}{\sin\frac{u}{v^2}}\cdot\cos\frac{u}{v^2}\cdot\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v^2}\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}, \quad z'_v = \frac{1}{\sin\frac{u}{v^2}}\cdot\cos\frac{u}{v^2}\cdot u\cdot\left(-2v^{-3}\right) = -\frac{2u}{v^3}\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}.$$

Funkciju u un v parciālie atvasinājumi pēc x un pēc y:

$$u'_x = \sin y\,, \quad u'_y = x\cos y\,, \quad v'_x = -y\sin x\,, \quad v'_y = \cos x\,.$$

Šos atvasinājumus ievietosim saliktas funkcijas parciālo atvasinājumu formulā (1. gadījums):

$$z'_x = \frac{1}{v^2}\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\cdot\sin y + \frac{2u}{v^3}\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\cdot y\sin x\,, \qquad z'_y = \frac{1}{v^2}\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\cdot x\cos y - \frac{2u}{v^3}\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\cdot\cos x\,.$$

Piemērs. Noteikt saliktas funkcijas $z = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{y}\right)$, kur $x = 2^{-t}$, $y = t^2 + 5$, pilno atvasinājumu.

Risinājums. Atradīsim funkcijas z parciālos atvasinājumus pēc x un pēc y:

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(x\sqrt{y}\right)^2}\cdot\sqrt{y} = \frac{\sqrt{y}}{1+x^2y}\,, \quad z'_y = \frac{1}{1+\left(x\sqrt{y}\right)^2}\cdot x\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2\sqrt{y}\left(1+x^2y\right)}\,.$$

Funkciju x un y atvasinājumi:

$$x' = 2^{-t}\ln 2\cdot(-1) = -2^{-t}\ln 2\,, \quad y' = 2t\,.$$

Dotās funkcijas pilno atvasinājumu iegūsim, šos atvasinājumus ievietojot atbilstošajā formulā (2. gadījums):

$$z'_t = \frac{\sqrt{y}}{1+x^2y}\cdot\left(-2^{-t}\ln 2\right) + \frac{x}{2\sqrt{y}\left(1+x^2y\right)}\cdot 2t\,.$$

Piemērs. Noteikt saliktas funkcijas $z = \dfrac{x-2y}{x^2+y}$, kur $y = \sqrt{x^3+5}$, pilno atvasinājumu.

Risinājums. Atradīsim funkcijas z parciālos atvasinājumus pēc x un pēc y:

$$z'_x = \frac{1\cdot\left(x^2+y\right) - (x-2y)\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2} = \frac{x^2+y-2x^2+4xy}{\left(x^2+y\right)^2} = \frac{4xy+y-x^2}{\left(x^2+y\right)^2}\,;$$

$$z'_y = \frac{-2\cdot\left(x^2+y\right) - (x-2y)\cdot 1}{\left(x^2+y\right)^2} = \frac{-2x^2-2y-x+2y}{\left(x^2+y\right)^2} = -\frac{2x^2+x}{\left(x^2+y\right)^2}\,.$$

Funkcijas y atvasinājums:

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^3+5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\,.$$

Šos atvasinājumus ievietosim saliktas funkcijas pilnā atvasinājuma formulā (3. gadījums):

$$z' = \frac{4xy + y - x^2}{\left(x^2 + y\right)^2} - \frac{2x^2 + x}{\left(x^2 + y\right)^2} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}}.$$

21.4. Apslēpti dotas vairāku argumentu funkcijas atvasināšana

Pieņemsim, ka ar vienādojumu $F(x,y,z) = 0$ ir definēta nepārtraukta funkcija $z = z(x,y)$ un funkcijas $F(x,y,z)$, $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$ ir nepārtrauktas kādā punkta $M(x,y,z)$ apkārtnē, kurš pieder pie funkcijas $F(x,y,z) = 0$ grafika. Vienādojuma $F(x,y,z) = 0$ abas puses atvasināsim pēc *x*, izmantojot saliktas funkcijas atvasināšanas principu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Ņemot vērā, ka $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ (jo *x* un *y* ir neatkarīgie mainīgie, tātad *y* nav atkarīgs no *x*), iegūsim

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{jeb} \quad F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0,$$

no kurienes seko $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$. Analoģiski iegūst $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Tātad funkcijas $z = z(x,y)$, kura dota apslēptā veidā ar vienādojumu $F(x,y,z) = 0$, parciālos atvasinājumus atrod pēc formulām

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Līdzīgi var atrast arī viena argumenta funkcijas $y = y(x)$ atvasinājumu, ja funkcija dota apslēptā veidā ar vienādojumu $F(x,y) = 0$. Tad

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Piemērs. Noteikt parciālos atvasinājumus funkcijai $z = z(x,y)$, ko apslēpti nosaka vienādojums $xe^{\frac{y}{z}} + x^y - 2x^2z^3 + \sin(y + 6z) = 5$.

Risinājums. Apzīmēsim $F(x,y,z)=xe^{\frac{y}{z}}+x^y-2x^2z^3+\sin(y+6z)-5$ un noteiksim šīs funkcijas parciālos atvasinājumus:

$$F'_x=e^{\frac{y}{z}}+yx^{y-1}-4xz^3,\quad F'_y=xe^{\frac{y}{z}}\cdot\frac{1}{z}+x^y\ln x+\cos(y+6z),$$

$$F'_z=xe^{\frac{y}{z}}\cdot y\cdot\left(-z^{-2}\right)-6x^2z^2+\cos(y+6z)\cdot 6=-xyz^{-2}e^{\frac{y}{z}}-6x^2z^2+6\cos(y+6z).$$

Šos atvasinājumus ievietosim apslēpti dotas funkcijas parciālo atvasinājumu formulās:

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{e^{\frac{y}{z}}+yx^{y-1}-4xz^3}{-xyz^{-2}e^{\frac{y}{z}}-6x^2z^2+6\cos(y+6z)},$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{xz^{-1}e^{\frac{y}{z}}+x^y\ln x+\cos(y+6z)}{-xyz^{-2}e^{\frac{y}{z}}-6x^2z^2+6\cos(y+6z)}.$$

Piemērs. Noteikt parciālos atvasinājumus funkcijai $y=y(x)$, ko apslēpti nosaka vienādojums $x^2\ln(3x-2y)+\frac{x}{\sqrt{2y}}-3y\ln y=1$.

Risinājums. Apzīmēsim $F(x,y)=x^2\ln(3x-2y)+\frac{x}{\sqrt{2y}}-3y\ln y-1$ un noteiksim šīs funkcijas parciālos atvasinājumus:

$$F'_x=2x\ln(3x-2y)+x^2\cdot\frac{1}{3x-2y}\cdot 3+\frac{1}{\sqrt{2y}}=2x\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{3x-2y}+\frac{1}{\sqrt{2y}},$$

$$F'_y=x^2\cdot\frac{1}{3x-2y}\cdot(-2)+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(2y)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2-3\ln y-3y\cdot\frac{1}{y}=-\frac{2x^2}{3x-2y}-\frac{x}{\sqrt{8y^3}}-3\ln y-3.$$

Tātad

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2x\ln(3x-2y)+\dfrac{3x^2}{3x-2y}+\dfrac{1}{\sqrt{2y}}}{-\dfrac{2x^2}{3x-2y}-\dfrac{x}{2y\sqrt{2y}}-3\ln y-3}=$$

$$=\frac{4xy\sqrt{2y}(3x-2y)\ln(3x-2y)+6x^2y\sqrt{2y}+2y(3x-2y)}{4x^2y\sqrt{2y}+x(3x-2y)+6y\sqrt{2y}(3x-2y)(\ln y+1)}.$$