

1.28. Упругий удар двух шаров

К деревянной раме 4 подвешены на нитях одинаковой длины два бильярдных шара 1. Центры шаров находятся на одной горизонтальной прямой. Такого положения добиваются при помощи регулирующих винтов 3. Две параллельные пластины 2 из оргстекла служат для удерживания шаров в одной вертикальной плоскости.

Отклоняют один из шаров, допустим, правый, и поднимают на высоту H . Затем шар отпускают и он сталкивается со вторым, который покоится. После столкновения правый шар останавливается, а левый отклоняется в левую сторону и поднимается на высоту H . Когда левый шар возвращается в исходное положение, он заново сталкивается с правым шаром и после этого останавливается.

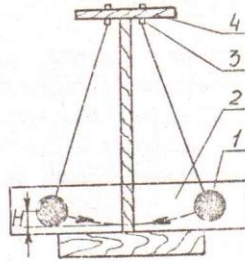


Рис. 55. 1 - одинаковые бильярдные шары, подвешенные на нитях одинаковой длины, 2 - две параллельные пластины из оргстекла, 3 - регулирующие винты, 4 - деревянная рама.

Правый шар отклоняется и поднимается на первоначальную высоту H (рис. 55).

Шары останавливают и дают им "успокоиться". Затем отклоняют оба шара в противоположных направлениях на одинаковую высоту H и отпускают. Шары приближаются и сталкиваются. После этого они разлетаются в противоположные стороны и поднимаются на первоначальную высоту H . Шарам дают несколько раз сталкиваться и наблюдают, что они всегда поднимаются на одинаковую высоту.

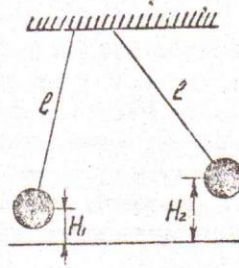


Рис. 56.

После остановки шаров их отклоняют и поднимают на разные высоты H_1 и H_2 (рис. 56). Для наглядности подбирают $H_2/H_1 = 2$. Одновременно шары отпускают, и они начинают сближаться, а в нижнем положении сталкиваются. Затем шары разлетаются в противоположные стороны и поднимаются на разные высоты. Высоты шаров сейчас обратны

первоначальным: правый шар отклоняется на высоту H_1 , а левый — на H_2 . После этого шары опять сближаются и сталкиваются. Разлетаясь, они поднимаются на первоначальные высоты: правый шар на высоту H_2 , а левый — на H_1 . Наблюдает несколько столкновений подряд, пока слушатели не убеждены в том, что после столкновения шары обмениваются высотами подъема.

В опыте наблюдается центральный или лобовой упругий удар двух тел (шаров). Ударом или столкновением называется кратковременное, но весьма сильное сближение тел. Если при этом внутреннее строение тел не изменяется, то удар называется упругим, в противном случае — неупругим. Упругие удары обыкновенно наблюдаются между телами, изготовленными из упругих веществ (сталь, резина, слоновая кость и т.п.). Этот процесс характеризуется тем, что в нем суммарный импульс и полная кинетическая энергия системы не изменяются по величине:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i = \text{const}; \quad \sum_{i=1}^n W_i^{(k)} = \text{const}.$$

Это означает, что в процессе упругого удара тела обмениваются импульсами и перераспределяют между собой суммарную кинетическую энергию.

Задачи о столкновениях часто сводятся к проблеме нахождения импульсов тел после удара. В случае двух тел, как это было в опыте, шары до удара обладают импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ и кинетическими энергиями:

$$W_1^{(k)} = \frac{p_1^2}{2m_1}; \quad W_2^{(k)} = \frac{p_2^2}{2m_2}.$$

Обозначая соответствующие величины после удара через $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$, $W_1'^{(k)}$, $W_2'^{(k)}$, можно написать законы сохранения для экспериментальной системы:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \end{cases}.$$

Эту систему уравнений можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 - \vec{p}_1' = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \\ \frac{m_2}{m_1} (\vec{p}_1 + \vec{p}_1') (\vec{p}_1 - \vec{p}_1') = (\vec{p}_2' + \vec{p}_2) (\vec{p}_1' - \vec{p}_2) \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем:

$$\frac{m_2}{m_1} (\vec{p}_1 + \vec{p}_1') = \vec{p}_2' + \vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \vec{p}_1' + 2\vec{p}_2$$

Окончательно получаются выражения импульсов шаров после удара:

$$\vec{p}_1' = \frac{2\vec{p}_2 + \vec{p}_1(1 - \frac{m_2}{m_1})}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (5) \quad \text{и} \quad \vec{p}_2' = \frac{2\vec{p}_1 + \vec{p}_2(1 - \frac{m_1}{m_2})}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad (6)$$

Исходя из последних двух выражений легко объяснить наблюдаемый опыт. Поскольку шары идентичны, их массы одинаковы $m_1 = m_2$.

В первом случае, когда отклоняется только один шар, в момент удара $\vec{p}_2 = 0$ и после удара получается $\vec{p}_1' = 0$, т.е. правый шар останавливается, а $\vec{p}_2' = \vec{p}_1$, т.е. левый шар отскакивает в том же направлении и с таким же импульсом, какой был у правого шара в момент удара. Кроме того, левый шар получает такую же кинетическую энергию, которая при отклонении шара переходит в потенциальную, и шар поднимается на высоту H .

Во втором случае шары поднимаются на одинаковые высоты. Их потенциальные энергии переходят в кинетические:

$$m_1 g H = \frac{m_1 V_1'^2}{2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} \quad \text{и} \quad m_2 g H = \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Поскольку массы шаров одинаковы, в момент удара и импульсы равны по величине, но противоположно направлены:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

После удара из выражений (5) и (6) получается:

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_1 \quad \text{и} \quad \vec{p}_2' = -\vec{p}_2 ,$$

т.е. шары отскакивают в обратном направлении с такими же импульсами. Если импульсы шаров по величине не меняются, они поднимаются на первоначальные высоты:

$$\frac{p_1'^2}{2m_1} = m_1 g H \quad \text{и} \quad \frac{p_2'^2}{2m_2} = m_2 g H .$$

В третьем варианте шары отклонены на разные высоты H_1 и H_2 и они обладают разными потенциальными энергиями:

$$m_1 g H_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{p_1^2}{2m_1} \quad \text{и} \quad m_2 g H_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{p_2^2}{2m_2} .$$

В момент удара импульсы шаров направлены в противоположные стороны и разные по величине. Из условий опыта, что $H_2/H_1 = 2$, следует отношение между импульсами p_1 и p_2 :

$$\frac{m_2 g H_2}{m_1 g H_1} = 2 = \frac{p_2^2}{p_1^2} ; \quad \vec{p}_2 = -\sqrt{2} \vec{p}_1 .$$

Учитывая найденное соотношение и подставляя его в уравнения (5) и (6), получается:

$$\vec{p}_1' = -\sqrt{2} \vec{p}_1 \quad \text{и} \quad \vec{p}_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{p}_2 ,$$

т.е. шары опять обмениваются импульсами по величине и каждый из них отскакивает обратно с таким импульсом, какой был у другого шара. Из последнего ясно, что при ударе шары обмениваются кинетическими энергиями и после удара каждый шар поднимается на такую высоту, на которой находился другой шар до удара.

Следует также отметить, что в опыте наблюдается не идеаль-

но упругий удар, т.е. в момент столкновения происходит незначительная деформация шаров. Это означает, что кинетическая энергия передается не полностью, а некоторая ее доля затрачивается на энергию деформации. Поэтому, после многократного столкновения высота шаров постепенно уменьшается.