Nepārtraukts gadījuma lielums.

Nepārtraukts gadījuma lielums var pieņemt jebkuru vērtību kādā intervālā. Tas nozīmē, ka tā iespējamo vērtību skaits ir neierobežots un līdz ar to atsevišķas skaitliskas vērtības varbūtība ir vienāda ar nulli. Tāpēc nozīme ir tikai aprēķināt varbūtību, ka nepārtrauktais gadījuma lielums X pieņems vērtību kādā intervālā $(x_1; x_2)$. Šo varbūtību pieraksta šādi:

$$P(x_1 < x < x_2) \quad \text{vai} \quad P(x_1 \le x \le x_2).$$

Likumu, ar kuru var noteikt varbūtību, ka gadījuma lielums X pieņems vērtību intervālā $(x_1; x_2)$, sauc par šī lieluma *varbūtību sadalījumu*.

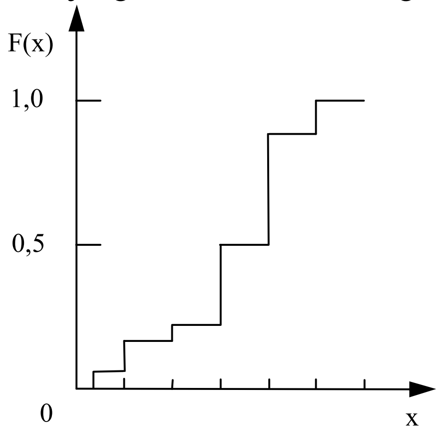
Varbūtību sadalījumu var uzdot ar *varbūtību sadalījuma funkciju* jeb *integrālo funkciju* $F(x)$, kura izsaka varbūtību, ka X pieņem par x mazāku vērtību. Varbūtību sadalījuma funkciju definē šādi:

$$F(x) = P(X < x). \tag{39}$$

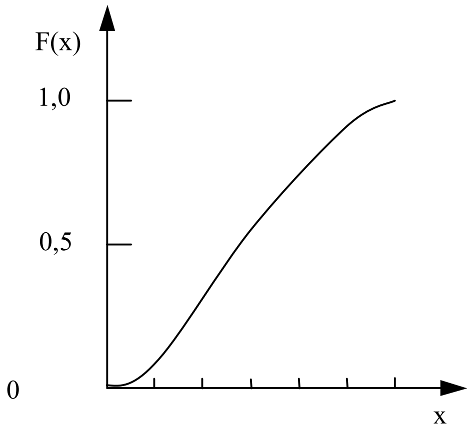
Gadījuma lieluma sadalījuma funkcija ir universāls šī lieluma raksturotājs, kuru var noteikt gan diskrētam, gan nepārtrauktam gadījuma lielumam. Īpaši svarīga nozīme tai ir nepārtraukta gadījuma lieluma varbūtību sadalījuma pētīšanā. Nepārtrauktam lielumam sadalījuma funkciju nevar izteikt tabulas veidā, kā tas iespējams, pētot diskrētu gadījumu lielumu.

Ja gadījuma lielums X ir diskrēts un tas dots ar tabulu, tad $F(x)$ atrašanai nepieciešams sastādīt varbūtības visām tām vērtībām, kas mazākas nekā x. Līdz ar to, pieskaitot kārtējo varbūtību, $F(x)$ izmainās lēcienveidā. Grafiks parādīts 1. zīmējumā.

Ja gadījuma lielums ir nepārtraukts, varbūtību summēšana nav iespējama un to aizstāj ar integrēšanu. No tā radies nosaukums integrālā sadalījuma funkcija. Šādas funkcijas grafiks ir monotoni augšupejoša līkne, kura ir parādīta 2. zīmējumā.



1. zīm.



2. zīm.

Varbūtību sadalījuma funkcijai piemīt šādas īpašības:

1. Tās maiņas apgabals ir slēgts intervāls [0;1], t.i.,

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ ir nedilstoša funkcija, t.i.,

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ ja } x_2 > x_1.$$

No definīcijas izriet šāda svarīga formula:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1), \tag{40}$$

t.i., varbūtība, ka X pieņem vērtību intervālā $[x_1; x_2]$, ir vienāda ar varbūtību sadalījuma funkcijas pieaugumu šajā intervālā.

3. Ja visas iespējamās gadījuma lieluma X vērtības pieder intervālam $[a; b]$, tad

$$F(x) = 0\text{, ja } x \le a, \quad \text{un} \quad F(x) = 1\text{, ja } x \ge b.$$

Ja nepārtraukts gadījuma lielums var pieņemt jebkuru vērtību, tad

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ un } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \quad \text{jeb īsāk} \quad F(-\infty) = 0 \text{ un } F(\infty) = 1.$$

Nepārtrauktu gadījuma lielumu var uzdot arī ar *varbūtību blīvuma* jeb *diferenciālo funkciju* $f(x)$. Varbūtību blīvuma funkcija ir varbūtību sadalījuma funkcijas atvasinājums, t.i.,

$$f(x) = F'(x). \tag{41}$$

Ja dota varbūtību blīvuma funkcija $f(x)$, tad varbūtību, ka X pieņem vērtību intervālā $[x_1; x_2]$ var aprēķināt ar formulu

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{42}$$

Ja ir zināma varbūtību blīvuma funkcija $f(x)$, tad varbūtību sadalījuma funkciju $F(x)$ var atrast ar formulu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{43}$$

Varbūtību blīvuma funkcijai piemīt šādas īpašības:

1. Varbūtību blīvuma funkcija nevar pieņemt negatīvas vērtības, t.i.,

$$f(x) \ge 0.$$

2. Jābūt izpildītai vienādībai

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{44}$$

Šīs vienādības pareizība izriet no tā, ka integrālis kreisajā pusē izsaka varbūtību, ka X pieņems vērtību intervālā $(-\infty; +\infty)$, bet šāds notikums ir drošs un tā varbūtība ir vienāda ar 1. Izteiksmei $f(x)dx$, kuru sauc par *varbūtību diferenciāli*, ir tāda pati loma aprēķinos ar nepārtrauktiem gadījuma lielumiem kā varbūtībām p_i aprēķinos ar diskrētiem gadījuma lielumiem. Tāpēc faktiski vienādība (44) izsaka, ka visu varbūtību summa ir vienāda ar 1.

Tāpat kā diskrētam gadījuma lielumam, arī nepārtrauktam gadījuma lielumam galvenie skaitliskie raksturojumi ir *matemātiskā cerība MX* un *dispersija DX*, kā arī ar dispersiju cieši saistītā *standartnovirze* $\sigma = \sqrt{DX}$.

Matemātisko cerību aprēķina ar formulu

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx\,; \tag{45}$$

bet dispersiju ar formulu

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x)dx\,. \tag{46}$$

Dispersijas aprēķināšanai var izmantot arī formulu

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2\,. \tag{47}$$

Nepārtrauktu gadījuma lielumu uzdod vai nu ar varbūtību blīvuma funkciju $f(x)$, vai ar varbūtību sadalījuma funkciju $F(x)$. Apskatīsim divus vienkāršus un praktiski svarīgākus gadījumus.

Ja varbūtību funkcijai $f(x)$ kādā galīgā intervālā $[a;b]$ ir pastāvīga vērtība C un ārpus šī intervāla $f(x) = 0$, tad sadalījumu sauc par *vienmērīgu*.

Izmantojot formulu (43), atrodam

$$\int_a^b C \cdot dx = 1\text{, no kurienes } C = \frac{1}{b-a}.$$

Tātad vienmērīgo sadalījumu nosaka varbūtību blīvuma funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases} \tag{48}$$

Ar formulu (43) nosaka varbūtību sadalījuma funkciju. Tā ir

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{49}$$

Formulas (45) un (47) ļauj aprēķināt matemātisko cerību un dispersiju vienmērīgajā sadalījumā. Iegūsim

$$MX = \frac{a+b}{2}, \tag{50}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{51}$$

un standartnovirze

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}\ . \tag{52}$$

Normālo sadalījumu nosaka varbūtību blīvuma funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ , \tag{53}$$

kas definēta visiem reāliem x. Tā satur divus parametrus μ un σ. Ar formulām (45) un (47) var pārbaudīt, ka parametrs μ ir matemātiskā cerība, bet σ – standartnovirze.

Ja $\mu = 0$ un $\sigma = 1$, tad sadalījumu sauc par *normēto* jeb *standarta normālo sadalījumu*. Pretējā gadījumā to sauc par *vispārīgo normālo sadalījumu*. Normētam sadalījumam varbūtību blīvuma funkcija ir

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ . \tag{54}$$

Šī funkcija ir tabulēta. Ja nepārtrauktu gadījuma lielumu X nosaka normālā sadalījuma blīvuma funkcija (53), tad varbūtību, ka šis lielums pieņem vērtību intervālā $[x_1; x_2]$, var aprēķināt ar formulu

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right), \tag{55}$$

kur $\Phi(x)$ ir *varbūtību integrālis* jeb *Laplasa funkcija*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\ . \tag{56}$$

Atzīmēsim galvenās funkcijas $\Phi(x)$ īpašības:

1. Funkcija $\Phi(x)$ ir definēta un nepārtraukta uz visas Ox ass.
2. Funkcija $\Phi(x)$ ir nepāra funkcija, t.i., $\Phi(x) = -\Phi(x)$.
3. $\Phi(0) = 0$.
4. $\Phi(+\infty) = 0{,}5$; $\Phi(-\infty) = -0{,}5$.
5. Funkcija $\Phi(x)$ ir monotoni augoša.

Funkcija $\Phi(x)$ arī ir tabulēta .

Praksē dažkārt jāaprēķina varbūtība, ka normāli sadalīts gadījuma lielums pieņem vērtību, kura no matemātiskās cerības μ atšķirsies mazāk par doto $\delta > 0$. Tad aprēķinus var izdarīt ar formulu

$$P(\mu-\delta < X < \mu+\delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \tag{57}$$

kura, protams, ir formulas (54) atsevišķs gadījums.