Gadījuma lielumi. Diskrētu gadījuma lielumu binomiālais un Puasona sadalījums

Par *gadījuma lielumu X* sauc lielumu, kurš izmēģinājuma rezultātā var pieņemt dažādas skaitliskas vērtības atkarībā no gadījuma. Varbūtību teorijas uzdevums ir noteikt gadījuma lieluma iespējamās vērtības un to varbūtības vēl nenotikušajos izmēģinājumos, izmantojot jau notikušu mēģinājumu rezultātus.

Diskrēta gadījuma lieluma X visas iespējamās vērtības x_1,x_2, x_3,... veido galīgu vai bezgalīgu skaitļu virkni, kur katrai vērtībai ir sava varbūtība.

Piemēram, metot monētu 4 reizes, ģerboņa uzkrišanas skaits ir 0, 1, 2, 3, 4. Katrai no šīm vērtībām ir noteikta varbūtība.

Otra veida gadījuma lielumi ir *nepārtraukti gadījuma lielumi*. Tie var pieņemt jebkuru vērtību noteiktā intervālā. Piemēram, par nepārtrauktiem gadījuma lielumiem var uzskatīt visus mērīšanas rezultātus un to kļūdas.

Gadījuma lielumu *varbūtību sadalījuma likums* vai nu norāda visas gadījuma lieluma vērtības un to varbūtības, vai arī formulu, ar kuru varbūtības var aprēķināt. Par diskrēta gadījuma lieluma *X* varbūtību sadalījumu sauc likumu, kas saista atsevišķas gadījuma lieluma vērtības ar to varbūtībām:

$$P(x = x_1) = p_1$$
$$P(x = x_2) = p_2$$
$$P(x = x_3) = p_2$$
....
$$P(x = x_n) = p_n$$

Ja diskrētā gadījuma lieluma vērtību nav daudz un to vērtības zināmas, tad sadalījumu parāda tabulas veidā:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Tā kā vērtību x_1, x_2, ...x_n realizēšanās ir notikumi, kas veido pilnu notikumu grupu, tad to varbūtību summa ir 1, t. i.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu var parādīt gan grafiski, gan analītiski, gan analītiski formulas veidā, kur varbūtība ir gadījuma lieluma vērtības funkcija.

Ja gadījuma lielums *X* var pieņemt vērtības no 1 līdz *n* un ir sadalīts vienmērīgi, tad to sauc par *vienmērīgo sadalījumu*.

Piemēram, metot spēļu kauliņu, punktu uzkrišanas varbūtību sadalījums ir vienmērīgs sadalījums:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ja diskrētā gadījuma lieluma vērtību varbūtības nosaka pēc Bernulli formulas, tad iegūst *binomiālo sadalījumu*.
Bernulli formula nosaka varbūtību tam, ka notikums A iestāsies m reizes ar vienu un to pašu varbūtību:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}} \tag{21}$$

Izdarot n izmēģinājumus, notikuma A iestāšanās reižu skaits ir diskrēts gadījuma lielumus, kura vērtības ir 0, 1, 2, ..., m,..., n.

m	0	1	2	...	m	...	n
$P_n(m)$	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	...	$C_n^m \cdot p^n \cdot q^{n-m}$	...	p^n

Jāņem vērā, ka $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$.

Piemērs. Kāda sportista viena šāviena trāpījuma varbūtība ir 0,8. Izdarīti 5 šāvieni. Noteikt trāpījumu skaita (0; 1; 2; 3; 4; 5) varbūtību sadalījumu.

Risinājums. Trāpījumu varbūtības nosaka ar Bernulli formulu un iegūst binomiālo trāpījumu varbūtību sadalījumu. Varbūtība, ka šāvējs trāpīs mērķī $p = 0{,}8$. Pretējā notikuma varbūtība $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $n = 5$.

m	$P_n(m)$
0	$P_5(0) = 0{,}2^5 = 0{,}00032$
1	$P_5(1) = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}00640$
2	$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}05120$
3	$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}20480$
4	$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}40960$
5	$P_5(5) = 0{,}8^5 = 0{,}32768$

$\sum_{i=0}^{5} p_i = 1$.

Ja izmēģinājumu skaits ir pietiekami liels ($n \to \infty$), tad varbūtību, ka no izmēģinājumiem notikums iestāsies tieši m reizes, aptuveni var aprēķināt pēc *Puasona sadalījuma formulas*:

$$\boxed{P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}} \tag{22}$$

kur $\lambda = n \cdot p$ – gadījuma lieluma vidējā vērtība.

Piemērs. Rūpnīca nosūtījusi uz kādu pilsētu 1000 pārbaudītu, tātad derīgu televizoru. Varbūtība, ka transportējot televizors sabojāsies, ir 0,003. Noteikt varbūtību, ka no visiem transportētajiem televizoriem nederīgi būs

1) divi televizori;
2) mazāk kā 2 televizori.

Risinājums. 1) $n = 1000$, $p = 0{,}003$, $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$, $m = 2$. Pēc Puasona sadalījuma formulas iegūsim

$$P_{1000}(2) \approx \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} \approx 0{,}22 .$$

2) $P_{1000}(m \le 2) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1)$;

$P_{1000}(0) = \dfrac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} = 0{,}0498$; $P_{1000}(1) = \dfrac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} = 0{,}1494$; (Atceramies, ka $0! = 1$)

$$P_{1000}(m \le 2) = 0{,}0498 + 0{,}1494 = 0{,}1992 .$$

Gadījuma lieluma skaitliskās vērtības vienmēr sakārto augošā secībā. Sadalījuma likums labi raksturo diskrētu gadījumu lielumu. Tomēr tā pieraksts ir garš un neērts. Tāpēc praksē lieto dažus lielumus, kuri īsi un labi raksturo gadījuma lielumus. Viens no tiem ir gadījuma lieluma *matemātiskā cerība*, kuru apzīmē *MX* un definē tā:

$$\boxed{MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i} \qquad (23)$$

Dažkārt matemātisko cerību apzīmē ar grieķu burtu μ. Matemātisko cerību sauc arī par *sadalījuma centru*.

Ar matemātisko cerību cieši saistās gadījuma lieluma vidējā aritmētiskā vērtība

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i . \qquad (24)$$

kur ω_i ir relatīvie biežumi. Vidējā aritmētiskā vērtība ir atkarīga no mēģinājumu skaita n. Jo lielāks ir mēģinājumu skaits, jo precīzāka ir šī vērtība. Ja gadījuma lielumam X nevar noteikt varbūtības ar klasisko definīciju, tad to vietā ņem relatīvos biežumus, kas aprēķināti lielam mēģinājumu skaitam n. Tad

$$MX \approx \overline{X} .$$

Matemātiskās cerības īpašības:

1. Pastāvīga jeb konstanta lieluma matemātiskā cerība ir vienāda ar šo pastāvīgo lielumu, t.i.,

$$MC = C , \; C - const . \qquad (25)$$

2. Tā kā dotajam gadījuma lielumam matemātiskā cerība ir pastāvīgs lielums, tad

$$M(C \cdot X) = C \cdot MX . \qquad (26)$$

3. Divu gadījuma lielumu summas matemātiskā cerība ir vienāda ar atbilstošo gadījuma lielumu matemātisko cerību summu:

$$M(X+Y)=MX+MY. \tag{27}$$

4. Divu gadījuma lielumu reizinājuma matemātiskā cerība ir vienāda ar atbilstošo gadījuma lielumu matemātisko cerību reizinājumu:

$$M(X\cdot Y)=MX\cdot MY. \tag{28}$$

Vēl jānosaka lielums, kas rāda, kā gadījuma lieluma vērtības sagrupējas ap matemātisko cerību $M(x)$. Visbiežāk lieto *dispersiju*, kuru apzīmē DX un definē tā:

$$\boxed{DX=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(x_i-MX)^2} \tag{29}$$

Jo DX ir lielāka, jo gadījuma lieluma X vērtības ir vairāk izkliedētas ap sadalījuma centru MX, jo tas mazāks, jo mazāka ir izkliede. Tāpēc matemātisko cerību MX sauc arī par *izkliedes centru*.

Ar dispersiju cieši saistās tās *vidējā kvadrātiskā* jeb *standartnovirze* σ, kuru nosaka šādi:

$$\sigma=\sqrt{DX}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-MX)^2}\,. \tag{30}$$

Dispersiju var aprēķināt pēc definīcijas ar formulu (29), bet dažkārt tās aprēķināšanai izdevīgāk lietot formulu

$$\boxed{DX=MX^2-(MX)^2} \tag{31}$$

kur $MX^2=\sum x_i^2\cdot p_i$.

Dispersijai piemīt šādas īpašības:

1. $DC=0$ (32)

2. $D(C\cdot X)=C^2\cdot DX$ (33)

3. $D(X+Y)=DX+DY$ (34)

Formula (34) ir pareiza tikai neatkarīgiem gadījuma lielumiem. To var vispārināt vairākiem saskaitāmiem.
No 3. īpašības izriet, ka $D(C+X)=DX$.

4. $D(X-Y)=DX+DY$ (35)

Binomiālajam sadalījumam:

$$M(x)=n\cdot p \tag{36}$$

$$D(x)=n\cdot p\cdot q \tag{37}$$

Par *modu* m_0 sauc to diskrētā gadījuma lieluma vērtību, kurai ir vislielākā varbūtība, citiem vārdiem, moda ir visvarbūtīgākā vērtība. Gadījuma lielumam var būt vairākas modas. Binomiālajam sadalījumam modu var noteikt pēc formulas

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p \,. \tag{38}$$

Tā kā labās un kreisās puses starpība ir 1 (jo $p + q = 1$), tad $m_0 \approx n \cdot p$, pie tam, ja $n \cdot p$ ir vesels skaitlis, tad $m_0 = n \cdot p$.

Binomiālajam sadalījumam labu uzskatāmību dod grafiski attēlojumi. Uz abscisu ass atliek iespējamās skaitliskās vērtības, bet par ordinātēm ņem atbilstošās varbūtības. Tā iegūst $n+1$ punktu. Tos savienojot ar taisnes nogriežņiem iegūst *sadalījuma poligonu*, bet izveidojot taisnstūrīšus, kuru pamati ir viena vienība, – *histogrammu*.