10. nodarbība

1. piemērs. Atrast definīcijas apgabalu funkcijai $f(x)=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$.

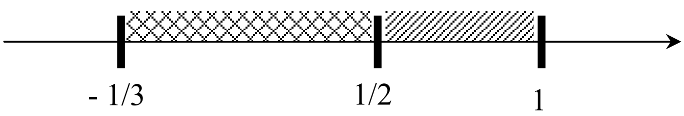
Pirmais saskaitāmais ir definēts, ja $1-2x\geq 0$. Otrais saskaitāmais ir definēts, ja $-1\leq\frac{3x-1}{2}\leq 1$, jo funkcijas $\sin x$ vērtību apgabals ir slēgts intervāls [-1;1], kurš tāpēc ir inversās funkcijas $\arcsin x$ definīcijas apgabals. Līdz ar to dotās funkcijas definīcijas apgabals ir iegūstams kā nevienādību sistēmas

$$\begin{cases} 1-2x\geq 0 \\ -1\leq\dfrac{3x-1}{2}\leq 1 \end{cases}$$

atrisinājums. Atrisināsim šo sistēmu:

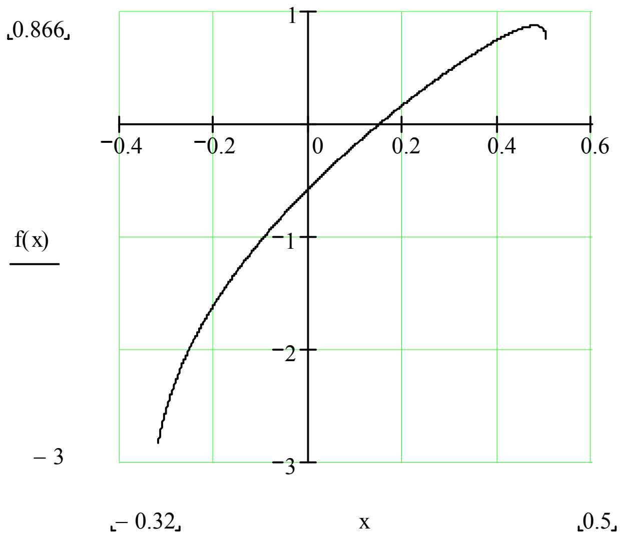
$$\begin{cases} 2x\leq 1 \\ -2\leq 3x-1\leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq\dfrac{1}{2} \\ -1\leq 3x\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{3}\leq x\leq 1 \end{cases}.$$

Abas pēdējās nevienādības izpildīsies tad, ja $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$, kā tas ir parādīts 1. zīmējumā.



1. zīm.

Šis intervāls arī ir dotās funkcijas definīcijas apgabals. Funkcijas grafiks ir parādīts 2.zīmējumā.



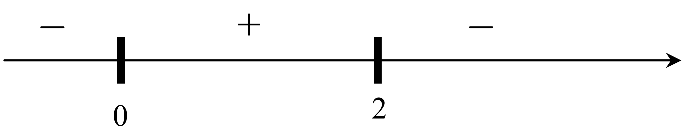
2. zīm.

2. piemērs. Atrast definīcijas apgabalu funkcijai $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}-\sqrt{\sin x}$.

Šīs funkcijas definīcijas apgabalu var iegūt, atrisinot nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-x} \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}.$$

Pirmās nevienādības skaitītājs ir 0, ja $x = 0$, bet saucējs ir 0, ja $x = 2$. Acīm redzami, ka daļa ir negatīva, ja $x \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$, bet pozitīva vai 0, ja $x \in [0;2)$.



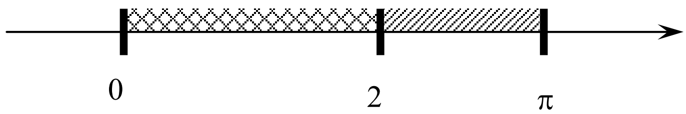
3. zīm.

No funkcijas $y = \sin x$ īpašībām seko, ka tā ir pozitīva vai 0, ja $x \in [2\pi n; 2\pi n + \pi]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Tātad, lai atrastu definīcijas apgabalu, ir jāatrod kopīgais apgabals intervāliem

$$\begin{cases} x \in [0;2) \\ x \in [2\pi n; 2\pi n + \pi] \end{cases}.$$

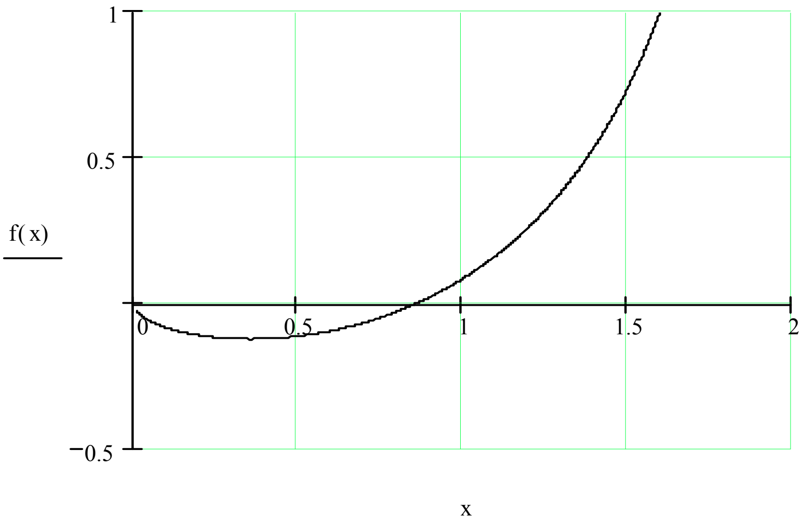
Ir redzams, ka kopīgais apgabals eksistē tikai tad, ja $n = 0$, t.i, jāatrod kopīgais apgabals intervāliem

$$\begin{cases} x \in [0;2) \\ x \in [0;\pi] \end{cases}.$$



4. zīm.

Šis kopīgais apgabals ir intervāls $x \in [0;2)$. Tas arī ir dotās funkcijas definīcijas apgabals. Funkcijas grafiks ir parādīts 5. zīmējumā.



5. zīm.

Nākošajā uzdevumā parādīts, kā atrast funkcijas grafika krustpunktus ar koordinātu asīm. Tā kā jebkurā Oy ass punktā $x = 0$, tad funkcijas $y = f(x)$ grafiks Oy asi krusto punktā $y = f(0)$. Tā kā jebkurā Ox ass punktā $y = 0$, tad funkcijas $y = f(x)$ grafika krustpunktus ar Ox asi atrod, atrisinot vienādojumu $f(x) = 0$.

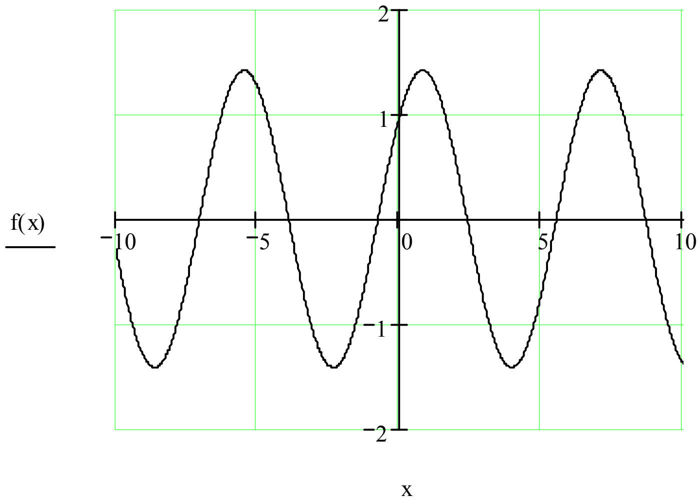
3. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = \sin x + \cos x$ krustpunktus ar koordinātu asīm.

Aprēķināsim dotās funkcijas vērtību punktā $x = 0$: $f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$. Tātad rustpunkts ar O*y* asi ir punkts $(0; 1)$. Lai atrastu krustpunktus ar O*x* asi, ir jāatrisina vienādojums

$$\sin x + \cos x = 0 \ /: \cos x$$

$$\mathrm{tg}\, x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{tg}\, x = -1 \ \Rightarrow \ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Funkcijas grafiks ir parādīts 6. zīmējumā.



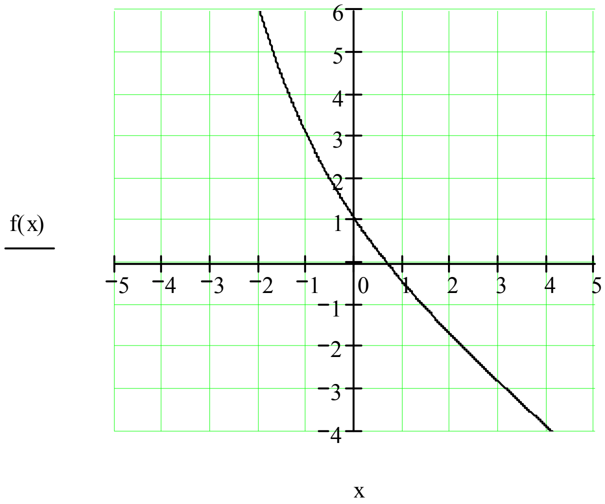
6. zīm.

Dažreiz var rasties objektīvas grūtības, atrodot krustpunktus ar O*x* asi, jo nav iespējams atrisināt vienādojumu $f(x) = 0$. Nākošajā uzdevumā ir parādīts, kā šādā gadījumā aptuveni atrast šo krustpunktu.

4. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = 2^{-x} - x$ grafika krustpunktu ar O*x* asi.

Vienādojumu $2^{-x} - x = 0$ nav iespējams precīzi atrisināt. Noteiksim intervālu, kurā atrodas vienādojuma atrisinājums. Lai to izdarītu, jāatrod divas *x* vērtības x_1 un x_2, kuras ir tādas, ka $f(x_1)$ un $f(x_2)$ zīmes ir atšķirīgas. Mūsu uzdevumā $f(0) = 2^0 - 0 = 1$, bet $f(1) = 2^{-1} - 1 = -\frac{1}{2}$. Līdz ar to grafika krustpunkts ar O*x* asi atrodas intervālā (0;1). Tagad samazināsim intervālu, kurā atrodas grafika krustpunkts ar O*x* asi. Aprēķināsim $f(0.5) = 2^{-0.5} - 0.5 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 0.5 \approx 0.207$. Tā kā $f(0.5) > 0$, bet $f(1) < 0$, tad grafiks O*x* asi krusto intervālā (0.5;1). Tagad atradīsim funkcijas vērtību intervāla (0.5;1) viduspunktā. Tā ir $f(0.75) = 2^{-0.75} - 0.75 \approx -0.155$. Tā kā $f(0.75) < 0$ un $f(0.5) > 0$, tad krustpunkts atrodas intervālā (0.5; 0.75). Aptuvenais intervāla viduspunkts ir $x = 0.62$. Aprēķināsim $f(0.62) = 2^{-0.62} - 0.62 \approx 0.031$. Tā kā $f(0.75) < 0$ un $f(0.62) > 0$, tad krustpunkts atrodas intervālā (0.62; 0.75). Tādā veidā turpinot, ir iespējams atrast funkcijas grafika krustpunktu ar Ox asi ar jebkuru precizitāti.

Jāpiezīmē, ka šādā veidā var atrast tikai vienu krustpunktu ar Ox asi, bet ir iespējams, ka eksistē arī citi krustpunkti. Ja tas ir tā, tad ir jāatrod cits intervāls, kurā atrodas krustpunkts, un jārīkojas, kā parādīts iepriekš. Apskatāmajai funkcijai citu krustpunktu ar Ox asi nav, jo acīmredzams, ka $f(x) < 0$, ja $x > 1$, un $f(x) > 0$, ja $x < 0$. Vienīgais krustpunkts atrodas intervālā (0;1). Aprakstīto uzdevuma risināšanas metodi sauc par bisekcijas metodi. Funkcijas $f(x) = 2^{-x} - x$ grafiks parādīts 7. zīmējumā.



7. zīm.

Nākošajā uzdevumā ir parādīts, kā atrast parametriski uzdotas funkcijas grafika krustpunktus ar koordinātu asīm.

Ja ir dota funkcija $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, tad, lai atrastu tās grafika krustpunktu ar Oy asi, rīkojas šādi:

- atrisina vienādojumu $x(t) = 0$,
- ja vienādojuma $x(t) = 0$ atrisinājums ir $t = t_1$, tad grafiks krusto Oy asi punktā $y = y(t_1)$.

Lai atrastu krustpunktus ar Ox asi, rīkojas šādi:

- atrisina vienādojumu $y(t) = 0$,
- ja vienādojuma $y(t) = 0$ atrisinājums ir $t = t_2$, tad grafiks krusto Ox asi punktā $x = x(t_1)$, ja vienādojumam $y(t) = 0$ ir vairāki atrisinājumi, tad funkcijai ir vairāki krustpunkti ar Ox asi.

5. piemērs. Atrast funkcijas $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$ grafika krustpunktus ar koordinātu asīm.

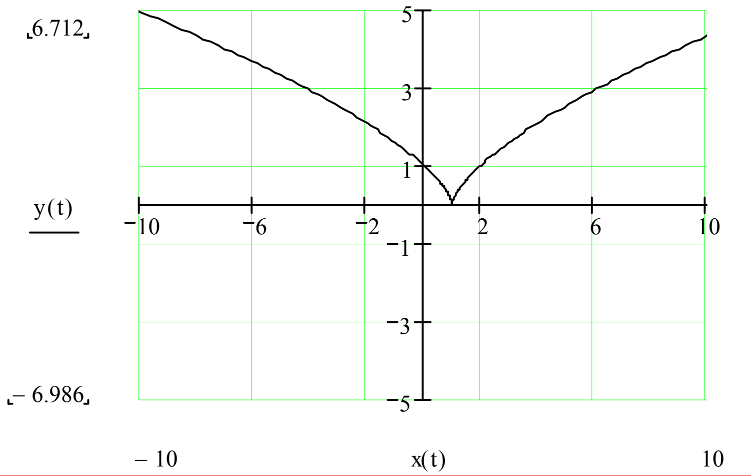
<u>Krustpunkts ar Oy asi ($x = 0$).</u>

$t^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad t = -1$. Līdz ar to $y(-1) = (-1)^2 = 1$. Krustpunkts ar Oy asi ir punkts (0;1).

<u>Krustpunkts ar Ox asi ($y = 0$).</u>

$0 = t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0$ un $x(0) = 0 + 1 = 1$. Krustpunkts ar Ox asi ir punkts (1;0).

Funkcijas grafiks ir parādīts 8. zīmējumā.



8. zīm.

Parametriskais funkcijas uzdošanas veids ir ērts, lai aprakstītu ķermeņa kustību pa sarežģītu trajektoriju. Ja parametrs t ir laiks un $(x(t),y(t))$ ir punkta koordinātas plaknē laika momentā t, tad funkcijas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ grafiks sakrīt ar ķermeņa kustības trajektoriju plaknē.

6. piemērs. Noteikt, kāda ir funkcija $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{1-x^6}+x\operatorname{tg}x$: pāra vai nepāra.

Lai noteiktu, vai dotā funkcija ir pāra vai nepāra, *x* vietā ievietosim –*x*:

$$f(-x)=\frac{3(-x)^2+4}{1-(-x)^6}+(-x)\operatorname{tg}(-x)=\frac{3x^2+4}{1-x^6}+x\operatorname{tg}x\,.$$

Ņemot vērā, ka $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$, ieguvām, ka $f(-x)=f(x)$, tātad dotā funkcija ir pāra funkcija.

7. piemērs. Noteikt, kāda ir funkcija $g(x)=5x^3-x\log_2\left(x^2+6\right)$: pāra vai nepāra.

Noteiksim $g(-x)$ un salīdzināsim ar doto funkciju:

$$g(-x)=5\cdot(-x)^3-(-x)\log_2\left((-x)^2+6\right)=-5x^3+x\log_2\left(x^2+6\right)=-\left(5x^3-x\log_2\left(x^2+6\right)\right).$$

Tā kā $g(-x)=-g(x)$, tad dotā funkcija ir nepāra funkcija.

8. piemērs. Noteikt, kāda ir funkcija $f(x)=\sqrt{3x+1}-2^x$: pāra vai nepāra.

Dotajā funkcijā *x* vietā ievietosim –*x*:

$$f(-x)=\sqrt{3(-x)+1}-2^{-x}=\sqrt{1-3x}-2^{-x}\,.$$

Tā kā $f(-x)\neq f(x)$ un $f(-x)\neq -f(x)$, tad dotā funkcija nav ne pāra, ne nepāra funkcija.

9. piemērs. Noteikt funkcijas $y=3\sin 5x$ periodu.

Kā zināms no skolas matemātikas kursa, funkcijas $\sin x$ periods ir $T_1=2\pi$. Tā kā dotajai funkcijai sinusa arguments ir 5*x*, tad sinusa periods jāizdala ar 5, t.i. dotās funkcijas periods ir $T=\dfrac{2\pi}{5}$. Skaitlis 3 pirms sinusa funkcijas periodu neietekmē, tas palielina sinusa amplitūdu 3 reizes.

10. piemērs. Noteikt funkcijas $y = 2\cos 4x + \mathrm{ctg}3x$ periodu.

Vispirms noteiksim periodu katram dotās funkcijas saskaitāmajam. Tā kā $\cos x$ periods ir 2π, tad funkcijas $2\cos 4x$ periods ir $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. $\mathrm{ctg}x$ periods ir π, tātad funkcijas $\mathrm{ctg}3x$ periods ir $T_2 = \frac{\pi}{3}$. Dotās funkcijas periods ir skaitļu T_1 un T_2 mazākais kopīgais dalāmais, t.i. mazākais skaitlis, kas dalās ar T_1 un T_2 veselos skaitļos. Šāds skaitlis ir π, līdz ar to arī dotās funkcijas periods $T = \pi$.

11. piemērs. Noteikt funkcijas $y = 3 - 2\lg\frac{x}{5}$ inverso funkciju, kā arī abu funkciju definīciju apgabalus un vērtību kopas.

Dotās funkcijas definīcijas apgabals: $\frac{x}{5} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \Rightarrow x \in (0; +\infty)$;
vērtību kopa: $y \in (-\infty; +\infty)$.
Lai atrastu dotās funkcijas inverso funkciju, x un y mainīsim lomām, t.i. $x = 3 - 2\lg\frac{y}{5}$ un izteiksim y:

$$2\lg\frac{y}{5} = 3 - x, \quad \lg\frac{y}{5} = \frac{3-x}{2}, \quad \frac{y}{5} = 10^{\frac{3-x}{2}}, \quad y = 5 \cdot 10^{\frac{3-x}{2}}.$$

Dotās funkcijas definīcijas apgabals kļūst par inversās funkcijas vērtību kopu un otrādi – dotās funkcijas vērtību kopa kļūst par inversās funkcijas definīcijas apgabalu, tātad inversās funkcijas definīcijas apgabals ir $x \in (-\infty; +\infty)$, vērtību kopa - $y \in (0; +\infty)$.

12. piemērs. Noteikt funkcijas $y = \arccos\sqrt{2x+5}$ inverso funkciju, kā arī abu funkciju definīciju apgabalus un vērtību kopas.

Dotās funkcijas definīcijas apgabalu nosaka nevienādības $\begin{cases} 2x+5 \ge 0 \\ -1 \le \sqrt{2x+5} \le 1 \end{cases}$. Tā kā nevienādība $-1 \le \sqrt{2x+5}$ izpildās jebkurai reālai x vērtībai, to varam atmest. Nevienādības $\sqrt{2x+5} \le 1$ abas puses kāpināsim kvadrātā, iegūsim $\begin{cases} 2x+5 \ge 0 \\ 2x+5 \le 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x \ge -5 \\ 2x \le -4 \end{cases}$, $\begin{cases} x \ge -2{,}5 \\ x \le -2 \end{cases}$. Tātad $x \in [-2{,}5; -2]$. Dotās funkcijas vērtību kopa sakrīt ar funkcijas $\arccos x$ vērtību kopu, t.i. $y \in [0; \pi]$.

Noteiksim inverso funkciju:

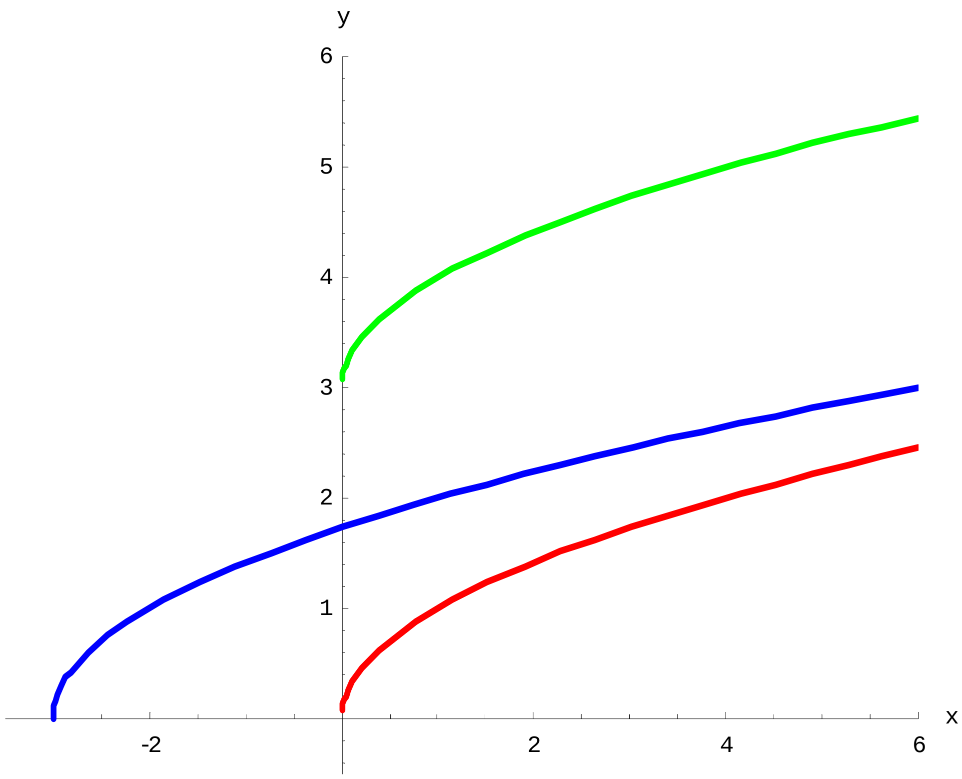
$$x = \arccos\sqrt{2y+5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2y+5} = \cos x \quad \Rightarrow \quad 2y+5 = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad 2y = \cos^2 x - 5$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x - 5\right).$$

Pēc dotās funkcijas noteiktā definīcijas apgabala un vērtību kopas seko, ka inversās funkcijas definīcijas apgabals ir $x \in [0;\pi]$, vērtību kopa - $y \in [-2{,}5; -2]$.

13. piemērs. Izmantojot funkcijas $y = \sqrt{x}$ grafiku, uzzīmēt funkciju $y = \sqrt{x+3}$ un $y = \sqrt{x} + 3$ grafikus.

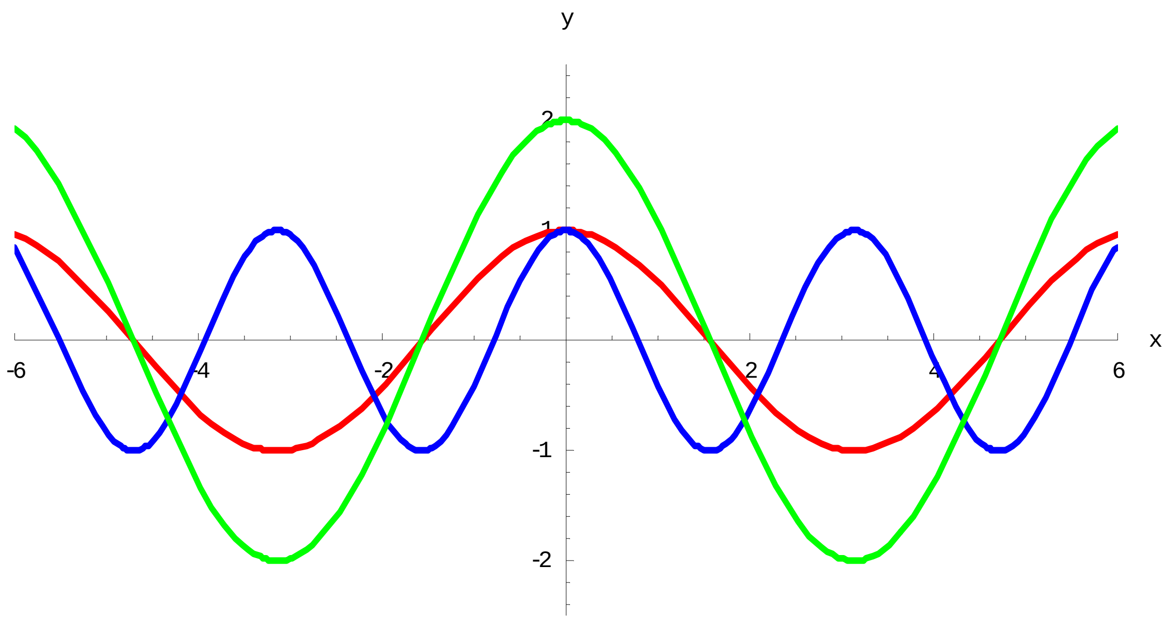
Salīdzinot ar funkcijas $y = \sqrt{x}$ grafiku, funkcijas $y = \sqrt{x+3}$ grafiks ir par 3 vienībām pabīdīts pa kreisi, bet funkcijas $y = \sqrt{x} + 3$ grafiks – pa 3 vienībām uz augšu. 9. zīmējumā attēlotā sarkanā līnija ir funkcijas $y = \sqrt{x}$ grafiks, zilā līnija – funkcijas $y = \sqrt{x+3}$ grafiks, sarkanā līnija – funkcijas $y = \sqrt{x} + 3$ grafiks.



9. zīm.

14. piemērs. Izmantojot funkcijas $y = \cos x$ grafiku, uzzīmēt funkciju $y = \cos 2x$ un $y = 2\cos x$ grafikus.

Funkcijas $y = \cos 2x$ periods ir divreiz mazāks nekā funkcijas $y = \cos x$ periods, līdz ar to šīs funkcijas grafiks būs it kā divreiz saspiests pa *Ox* asi. Funkcijas $y = 2\cos x$ amplitūda ir divreiz lielāka nekā funkcijas $y = \cos x$ amplitūda, tāpēc tās grafiks būs it kā divreiz izstiepts pa *Oy* asi. 10. zīmējumā ar sarkano līniju attēlots funkcijas $y = \cos x$ grafiks, ar zilo līniju – funkcijas $y = \cos 2x$ grafiks un ar zaļo līniju – funkcijas $y = 2\cos x$ grafiks.



10. zīm.